TD n°14 : Intégration sur un segment

Exercice 1. Calcul de primitives

Dans chacun des cas suivants, calculer l'intégrale après avoir justifié son existence :

$$I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx \quad , J = \int_{1/2}^1 \frac{e^{1/t}}{t^2} dt \quad , K = \int_0^2 \frac{e^y}{e^y+3} dy \quad , L = \int_e^{e^2} \frac{1}{t\sqrt{\ln t}} dt \quad , M = \int_1^4 \sqrt{y}(y-2\sqrt{y}) dy$$

$$N = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx \quad , P = \int_{-1}^1 |x^2-x| dx \quad , Q = \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad , R = \int_0^1 \max\left(x, \frac{1}{3}\right) dx.$$

Exercice 2. Changement de variable

Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué entre parenthèses.

$$I = \int_0^{10} \frac{x}{(x^2+2)(x^2+1)} dx \text{ avec } (y = x^2), \quad J = \int_0^{10} \frac{1}{e^t + e^{-t}} dt \text{ avec } (y = e^t),$$

$$K = \int_{1/2}^2 \cos\left(\frac{x}{1+x^2}\right) \frac{\ln x}{x} dx \text{ avec } \left(t = \frac{1}{x}\right), \quad L = \int_{1/2}^1 \frac{1}{x(x+1)} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx \text{ avec } \left(y = \frac{x}{x+1}\right)$$

Exercice 3. Intégration par parties

Calculer les intégrales suivantes.

$$I = \int_1^2 te^t dt, \quad J = \int_0^{-2} t^2 e^{5t} dt, \quad K = \int_1^2 y^3 \ln y \, dy, \quad L = \int_1^e x(\ln x)^2 dx,$$

$$M = \int_0^1 y^3 e^{y^2} dy, \quad N = \int_{-\pi}^{\pi} x\cos(x) dx, \quad P = \int_0^{\pi/4} e^t \cos(4t) dt.$$

Exercice 4. Série de Bertrand

1. Montrer que $\forall k \geq 2$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln x} dx \leq \frac{1}{k \ln k}$.
2. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k \ln k}$. Montrer que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 5. Suite d'intégrales

On pose pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t}\, dt.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{\sqrt{2}}{n+1}$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 6. Série exponentielle

On pose pour $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!}.$$
En déduire la limite de I_n quand $n \to +\infty$.
3. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}.$$
4. Montrer que
$$\forall n \geq 0, \quad I_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$
En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Exercice 7. Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt.$$

1. Calculer W_0 et W_1.
2. Montrer que la suite (W_n) est décroissante. En déduire qu'elle converge.
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}.$$
En déduire une relation de récurrence entre W_{n+2} et W_n.
4. Montrer alors que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n\, n!)^2} \frac{\pi}{2}.$$
5. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et préciser sa valeur.
6. En déduire l'expression de W_{2n+1} pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. Taux d'accroissement

Soient f une fonction continue sur $[0, +\infty[$ et g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par
$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt.$$
Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 en précisant la valeur.

Exercice 9. Intégrale avec bornes variables

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = \int_x^{2x} \exp(-t^2)dt.$$

1. (a) Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que g est une fonction impaire.
   (c) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
2. (a) Justifier que g est de classe C^1 et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$.
   (b) Dresser le tableau de variations de g. On précisera $g(0)$.
   (c) Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[$,
$$x \exp(-4x^2) \leq g(x) \leq x \exp(-x^2).$$
   En déduire la limite de g en $+\infty$, puis en $-\infty$.

Exercice 10. Intégrale à paramètre

Soit la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{t+x} dt$.

1. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_F$ de F.
2. Montrer que la fonction F est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Etudier la limite de F en $+\infty$.

Exercice 11. Bijection réciproque

1. Dresser le tableau de variations complet de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2} dt$.
2. Montrer qu'il existe une unique fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$\int_0^{u(x)} e^{t^2} dt = x.$$
3. Etudier les variations de u ainsi que sa dérivabilité.

Exercice 12. Sommes de Riemann

Montrer que les suites suivantes sont convergentes, et trouver leur limite.

a) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{k}}{n^{3/2}}$ b) $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$ c) $w_n = \left(\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right)\right)^{1/n}$